Spezielles Halteproblem / Selbstanwendbarkeitsproblem

$$K := \{w | w \in \{0,1\}^*, M_w \text{ hält auf } w \text{ bzw. } h_w(w) \text{ ist definiert}\}$$

K ist rekursiv aufzählbar, da ch'_K berechenbar durch Simulation von M_w auf w.

K ist nicht berechenbar (Charakteristische Funktion nur semi-entscheidbar), da, wäre K entscheidbar:

- $E^* \setminus K$ semi-entscheidbare
- TM definiert durch Wort $x \in E^*$ hält auf $w \Leftrightarrow w \in E^* \setminus K$
- $h_x(w)$ definiert $\Leftrightarrow w \in E^* \setminus K$
- Für $h_x(x)$:

$$\begin{aligned} h_x(x) \text{ definiert} &\Leftrightarrow & x \in K & \quad \text{(Definition von } K) \\ &\Leftrightarrow & \text{TM hält nicht auf } x & \\ &\Leftrightarrow & h_x(x) \text{ nicht definiert} & \quad \text{(Definition von TM)} \\ &\Leftrightarrow & x \in E^* \setminus K \Leftrightarrow x \notin K & \end{aligned}$$

- $\Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow K$ nicht entscheidbar (nur utm-Eigenschaft benutzt)

Allgemeines Halteproblem

$$H := \{w\$x \mid w \in \{0,1\}^*, \$ \notin E^*,\ M_w \text{ hält auf } x \text{ an }\}$$

H ist rekursiv aufzählbar (utm-Eigenschaft $\Rightarrow$ Simulation von M_w auf x ($h_w(x)$)).

H ist nicht entscheidbar, da

- konstruiere berechenbare und totale Reduktionsfunktion $f : E^* \to E^*\$E^*$, mit $f(w) \mapsto w\$w$
- $\Rightarrow K \leq H \ \Rightarrow\ H$ nicht entscheidbar

Satz von Rice

Sei R Klasse der Turing-berechenbaren Wortfunktionen über E, dann für $\varnothing \neq S \subsetneq R$:

$$C(S) := \{w \mid w \in \{0,1\}^*, h_w \in S\}$$

$C(S)$ ist nicht entscheidbar (unentscheidbar). O.B.d.A. $ud \in S$ (ansonsten setze $q \in S$):

- sei Funktion $q \in R \setminus S$, Q eine TM für q
- Funktion g beschreibe Q mit Eingabe `w#x`:
  1. Simuliere M_w auf w
  2. Simuliere Q mit Eingabe x
- mit smn: $\exists r : E^* \to E^*$, sodass $g(w\#x) = h_{r(w)}(x)$ mit
  - M_w hält auf $w \Rightarrow g = q$
  - M_w hält nicht auf $w \Rightarrow g = ud$

$$\begin{array}{cccccccc} \Rightarrow & w \in K & \Rightarrow & h_{r(w)} = q & \Rightarrow & h_{r(w)} \notin S & \Rightarrow & r(w) \notin C(S) \\ \wedge & w \notin K & \Rightarrow & h_{r(w)} = ud & \Rightarrow & h_{r(w)} \in S & \Rightarrow & r(w) \in C(S) \end{array}$$

$\Rightarrow r$ reduziert $E^* \setminus K$ auf $C(S)$ ($ud \notin S$), bzw. $K \leq_r C(S)$ ($ud \in S$) $\quad\Rightarrow\quad C(S)$ nicht entscheidbar.

Folgerungen Für (reale) Programme P in der Regel unentscheidbar:

- $\{ f \mid f$ berechenbar und total $\}$ (P hält immer)
- $\{ g \}$ für gegebenes g (P berechnet genau g)
- $\{ g \mid g(\varepsilon) = \varepsilon \}$ (P erfüllt Spezifikation - hier $g(\varepsilon) = \varepsilon$)